振動と同期学の研究会
JSSR (Japanese Society for oscillations and Synchrology Research)

鉄道車輪の臨界速度以下での衝突振動維持機構について

沖 真裕

筑波大学 システム情報工学研究群 知能機能システム学位プログラム

あらまし　線形臨界速度未満で持続する鉄道車輪軸の衝突振動について、自由飛行中のエネルギー収支、衝突を含む周期閉鎖条件および吸引域の解析にもとづき、維持機構に関する知見と今後の検討事項を述べる。
キーワード 蛇行動、衝突振動、エネルギー収支、周期閉鎖、吸引域

Maintenance of impact oscillations in railway wheelsets

Masahiro OKI

Degree Programs in Systems and Information Engineering, The university of Tsukuba

1. 序言

鉄道車輪軸の蛇行動は、車輪とレールの間に生じるクリープ力によって左右方向とヨーイング方向の運動が連成することで発生する自励振動現象である [1]。振幅が遊間距離に達するとフランジとレールが接触し、乗り心地や車輪・レールの寿命に影響する。フランジ接触を伴う蛇行動については、分岐解析によって多様な振動が報告されている [2]。著者らが対象としてきた、衝突のみを非線形要因とする一輪軸モデルにおいても、種々の分岐を経て多様な衝突振動パターンが生じることが分岐解析によって明らかとなっている。本稿ではその中でも、Grazing 分岐と Saddle-node 分岐を経て、線形臨界速度未満の速度域に安定および不安定な有限振幅衝突周期解が存在する現象に着目する。

鉄道車両の非線形蛇行動では、線形臨界速度未満に有限振幅周期解が存在する現象が分岐解析によって示されており、フランジ接触を伴う周期振動についてもその存在や安定性が検討されている [3]。また、不連続力学系理論においても、Grazing 近傍における衝突周期解の生成や安定性などの分岐構造が解析されている [4]。一方、これらの研究は主として周期解の存在や分岐構造に着目しており、衝突がどのような力学的役割によって臨界値未満の周期振動を成立・維持させるかについては十分に明らかでない。そこで本稿では、自由飛行中のエネルギー収支および衝突を含む周期閉鎖条件に着目し、その維持機構について検討する。

2. 解析モデルと運動方程式

図 1 に、解析モデルを示す。車輪軸は台車にばねで支持され、一定の速度 V で走行するものとする。左右方向変位を y、ヨーイング方向変位を ψ とし、状態量を $\boldsymbol{x} = [y, \dot{y}, \psi, \dot{\psi}]^{\mathsf{T}}$ とする。非接触状態の運動は、線形クリープ力を用いて以下のように表される。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(V)\boldsymbol{x}, \qquad |y| < d_c. \tag{1}$$

ここで d_c は片側の遊間距離、$\boldsymbol{A}(V)$ は連成運動の係数行列である。また、フランジ接触は以下のような速度の不連続変化として表される。

$$\dot{y}^{+} = -\alpha \dot{y}^{-}, \qquad |y| = d_c. \tag{2}$$

ここで α は反発係数、上添字 $-$、$+$ は衝突直前、直後を表す。衝突時には y、ψ、$\dot{\psi}$ は連続とする。

3. 衝突振動の数値解析

左側のレールへの衝突直後から右側を経て次の左側の衝突直後に戻る帰還写像を構成し、シューティ

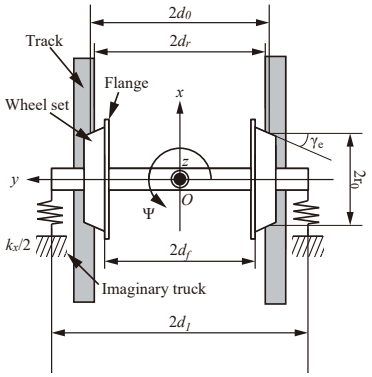

図 1: 上から見た一輪軸台車のモデル

ング法 [5] で周期解を求める。安定性は特性乗数で判定する。数値解析では、臨界速度未満で安定・不安定対称解が合流するサドルノード（SN）分岐、安定対称振動の対称性が破れるピッチフォーク（PF）分岐、非対称振動の周期倍分岐が確認された。以下では、臨界速度未満の対称振動に着目する。

線形臨界速度 $V_{\mathrm{lin}} = 4\,\mathrm{m/s}$ に対し、$V = 2.525\,\mathrm{m/s}$ では、安定な原点と安定・不安定な対称衝突周期軌道が共存し、初期状態によって収束先が異なる。

4. 衝突振動維持機構の検討

式 (2) より、$0 < \alpha < 1$ では衝突時に左右方向の運動エネルギーは減少するため、振動を維持するエネルギーは走行に伴うクリープ力から供給される。衝突は左右方向速度を反転・減少させ、ヨーイング方向の運動との位相・振幅関係を変化させることから、この状態変化が次の衝突までの非接触運動（以下、自由飛行）で受け取る仕事に及ぼす影響を調べた。

代表的な安定対称周期軌道では、反発係数 $\alpha = 0.7$ の衝突後は $\alpha = 1$ の弾性反転後より次の自由飛行で受け取るクリープ力の仕事と正味のエネルギー増加が大きかった。一方、衝突面上の状態を走査すると、周期軌道上の状態は仕事を最大にする点ではなく、正味エネルギー変化が正で反対側のレールへ到達できる状態の領域は SN 分岐より低速側にも存在し、安定・不安定周期解の両方を含んでいた。したがって、一回の自由飛行でエネルギーを得られることだけでは周期振動の成立や安定性を説明できない。

そこで、周期振動の成立を状態の周期的な自己整合性として捉えた。衝突による状態変化を $\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(1, -\alpha, 1, 1)$ とすると、対称周期軌道の半周期時間 τ に対する周期閉鎖の代数条件は

$$\det\left[\boldsymbol{B}e^{\boldsymbol{A}(V)\tau} + \boldsymbol{I}\right] = 0 \tag{3}$$

と表される。この条件から得られる解曲線はシューティング法で求めた安定・不安定周期枝および SN 分岐を再現した。したがって、SN 分岐は一回の自由飛行が可能となる状態領域の生成点ではなく、衝突を含む周期閉鎖条件を満たす周期解対が合流する点と解釈できる。

また、$V = 2.525\,\mathrm{m/s}$ で吸引域境界を調べたところ、不安定周期軌道は 1 方向に不安定、2 方向に安定な鞍型固定点であり、その不安定方向の両側で原点と安定周期軌道へ収束先が分かれた。さらに、追跡した吸引域境界候補の多くが不安定周期軌道へ接近したことから、その安定多様体が有限振幅衝突振動への遷移を分ける主要な閾値の一部を形成すると考えられる。

一方、安定衝突周期軌道の近傍で摂動が減少する具体的な機構は未解明である。今後、一周期の帰還写像を自由飛行、衝突による状態変化および摂動に伴う衝突時刻の変化に分け、各過程がどの状態方向を伸長・収縮させるかを調べる必要がある。

5. 結言

線形臨界速度未満の衝突周期振動について、一回の自由飛行におけるエネルギー獲得だけではその成立や安定性を説明できず、衝突を含む周期閉鎖と有限振幅の状態空間構造を考える必要があることを示した。また、不安定周期軌道の安定多様体が有限振幅衝突振動への遷移閾値の一部を形成することが示唆された。今後は、一周期中の摂動の伸長・収縮を解析し、衝突が安定周期軌道の局所安定性に果たす役割を検討する。

参考文献

[1] A. H. Wickens, The dynamic stability of railway vehicle wheelsets and bogies having profiled wheels, *Int. J. Solids Struct.*, 1(3), pp. 319–341, 1965.

[2] P. Miao et al., Double grazing bifurcations of the non-smooth railway wheelset systems, *Nonlinear Dyn.*, 111(3), pp. 2093–2110, 2023.

[3] T. Mazilu, An analysis of bogie hunting instability, *U.P.B. Sci. Bull., Series D*, 71(2), 2009.

[4] A. B. Nordmark, Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator, *J. Sound Vib.*, 145(2), pp. 279–297, 1991.

[5] H. Kawakami and K. Kobayashi, A computation of periodic solutions of nonlinear autonomous systems, *Proc. ISCAS'79*, pp. 44–45, 1979.