時空間有限要素法の誤差評価と振動問題への適用

竹内 謙善 [1]

[1] 香川大学創造工学部 創造工学部　〒 760–8521 香川県高松市幸町 1–1

あらまし　弾性体の振動，熱伝導体の非定常熱伝導などの時間発展型の物理現象は時間と空間に対する偏微分方程式で記述できる．これらの現象の数値解析では，空間方向に対しては有限要素法を適用し，時間方向には差分法を適用した解法を構築することが一般的である．これに対して，時間と空間を区別せずに有限要素法の枠組みを適用して離散化する，時空間有限要素法が試みられている．本研究では，１次元熱伝導体の非定常熱伝導問題に時空間有限要素法を適用した場合の誤差評価と，３次元弾性体の振動問題に対して時空間有限要素法の適用を試みた．
キーワード 時空間有限要素法，非定常熱伝導問題，振動問題

Error evaluation for space-time finite element method and its application to vibration problems

Kenzen TAKEUCHI[1]

[1] Kagawa University, Faculty of Engineering and Design,
Saiwaicho 1–1, Takamatsu City, Kagawa Prefecture 760–8521, Japan

Abstract Time-dependent physical phenomena, such as the vibration of elastic bodies or unsteady heat conduction in thermal conductors, can be described by partial differential equations in terms of space and time. For the numerical analysis of these phenomena, it is common to employ some solution methods that use the finite element method for the spatial dimensions and the finite difference method for the temporal dimension. Meanwhile, attempts have been made to use the space-time finite element method, which discretizes both space and time in a unified framework of the finite element method. In this study, error evaluation is performed in a case of the space-time finite element method applied to a transient heat conduction problem. In addition, the space-time finite element method is applied to vibration problems.
Key words space-time finite element method, transient heat conduction problem, vibration problem

1. はじめに

物理現象を記述する偏微分方程式の汎用的な解法として有限要素法が広く利用されているが，弾性体の振動現象や熱伝導体の非定常熱伝導現象のような物理現象に対しては，空間方向には有限要素法で離散化し，時間方向には差分法が適用して逐次的な解法を構築することが一般的である．一方，時間方向にも有限要素法の枠組みを適用して，時間方向と空間方向を区別せずに統一的な枠組みで離散化した数値解法を構築することも試みられている [1] [2]．時空間有限要素法のアイデア自体は古くから存在するが，３次元空間に時間を加えた４次元空間で有限要素モデルを構築して実用的な規模で解析した例はまだ少ない．

時空間有限要素法では，時間と空間を区別せずに

統一的な枠組みで離散化が行えることが特徴であるが，それに加えて，４次元空間での有限要素モデルを構築，解析することで，(1) 時間方向の並列処理が可能となり，計算時間短縮の余地が生まれる．(2) 時間方向の境界条件が扱える．(3) 時間と空間の双方で高次近似が容易に行える．等のメリットが考えられる．本研究では，空間１次元の非定常熱伝導問題に時空間有限要素法を適用し，解析解や従来の解法との比較を行った．また，３次元弾性体の振動問題に対しても時空間有限要素法が適用できることを示した．

2. 時空間有限要素法の誤差評価

１次元熱伝導体の温度を $\phi(x,t), x \in [0,100], t \in [0,100]$ として，次式で示す非定常熱伝導方程式が成立しているとする．

$$10\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial\phi}{\partial t}, x \in [0,100], t \in [0,100] \tag{1}$$

ただし，初期条件と境界条件が以下のように与えられている．

$$\phi(x,0) = \begin{cases} x & (0 \le x \le 50) \\ 100 - x & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{2}$$

$$q(0,t) = q(100,t) = 0, t \in (0,100] \tag{3}$$

以上の問題に対して，時空間有限要素法を適用して，解析解及び従来の解法との比較を行った．従来の解法として時間方向の離散化に一般化 β 法を使用し，$\beta = 0.48, 0.5, 1.0$ の三種類で解析した．時空間有限要素法では４節点四角形要素 (QUAD4) と８節点四角形要素 (QUAD8) の二種類を解析した．図 1 に示すように，時空間有限要素法は従来の解法より精度の高い結果が得られた．

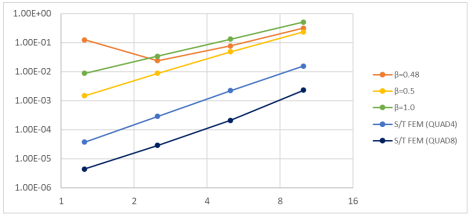

図 1: 各解法で得られた結果と解析解との誤差を比較した．横軸は要素スケール，縦軸は各節点での誤差の二乗平均値である．

3. 時空間有限要素法の振動問題への適用

弾性体 Ω の振動問題を考える．時間 $t \in [0,T]$ における弾性体の変位を $\boldsymbol{u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ について次式が成立する．

$$\rho\frac{\partial^2 u_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2} + \alpha\rho\frac{\partial u_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} - \frac{\partial\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_j} = f_i(\boldsymbol{x},t),$$
$$\forall(\boldsymbol{x},t) \in \Omega \times [0,T],\ i,j = x,y,z \tag{4}$$

ここで ρ, α, f_i は，それぞれ質量密度，レーリー減衰係数（質量比例），物体力である．また，σ_{ij} は次式で与えられる応力の各成分である．

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl},\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$
$$i,j,k,l = x,y,z \tag{5}$$

ここで ε_{ij} はひずみ，C_{ijkl} は弾性テンソルの各成分である．弾性体が周期 T で振動する物体だと仮定すると，変位 $\boldsymbol{u}$ と速度 $\boldsymbol{v} = \partial\boldsymbol{u}/\partial t$ について，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},T), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},T)$ が成立する．以上の条件下でテスト関数を $\boldsymbol{\delta u} : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ とすると，次式のような弱形式が得られる．

$$\int_0^T\int_\Omega \left(\sigma_{ij}\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} + \alpha\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta u_i - \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial\delta u_i}{\partial t}\right)d\Omega dt$$
$$= \int_0^T\int_\Gamma \sigma_{ij}n_j\delta u_i\, d\Gamma\, dt + \int_0^T\int_\Omega f_i\delta u_i\, d\Omega\, dt,$$
$$i,j,= x,y,z \tag{6}$$

ここで，Γ は弾性体の境界，n_j はその法線ベクトルの各成分である．このような弱形式に対して時空間有限要素法が適用可能である．

参考文献

[1] T.J.R. Hughes, G.M. Hulbert, Space-time finite element methods for elastodynamics: formulations and error estimates, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 66, pp.339–363 (1988).

[2] V. Sharma, K. Fujisawa, A, Murakami, Velocity-based time-discontinuous Galerkin space-time finite element method for elastodynamics. Soils and Foundations 58, pp.491–510 (2018).