二階の遅延微分方程式と振幅増幅

大平徹

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

あらまし　前回は, 遅れ相互作用するシステムを記述する単純な非自励系の連立遅れ微分方程式において, 巨大な振幅の拡大現象が出現したことを報告した. 今回は, より単純な系でも同様の現象が見られたので, 二階の遅延微分方程式として定式化して調べた結果を報告する.
キーワード 遅れ微分方程式，厳密解，相互作用, 振幅拡大現象

A second-order delay differential equation and amplitude enhancement phenomena

Toru Ohira

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Abstract In our previous study, we reported the emergence of a phenomenon of enormous amplitude amplification in a system of coupled, non-autonomous delay differential equations describing delayed interactions. In this study, we show that a similar phenomenon can also occur in an even simpler system. We formulate this system as a second-order delay differential equation and investigate its behavior.
Key words delay differential equation, exact solutio, coupling interaction, amplitude enhancement

本研究では特に以下の二階の非自励系遅延微分方程式を中心とした探求を行います.

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + atY(t) + \mu Y(t-\tau) = 0. \tag{1}$$

（$a > 0, b$ は実数定数で τ は遅れ）この式は以下の連立方程式としても記述できます ($\mu = -bc$).

$$\frac{dX(t)}{dt} + atX(t) = bY(t-\tau), \quad \frac{dY(t)}{dt} = cX(t). \tag{2}$$

背景としては, 下記があります.

(i) 連立方程式描写においてはパラメータの適切な調整によって下記の連立していない場合と比較して場合と比べて X, Y のダイナミクスの軌道の振幅が 1 億倍程度にまで増幅されるという現象が出現したこと [1].

$$\frac{dX(t)}{dt} + atX(t) = bX(t-\tau_1), \quad \frac{dY(t)}{dt} = cY(t). \tag{3}$$

(ii) 上記 (3) の $X(t)$ については $-\infty < t < \infty$ における一つの厳密解である下記の式 (4) を導出することに非自励系遅延微分方程式では初めて成功していて [2], この厳密解は $n = 0, 1, 2, \ldots$ について, 中心 $t = n\tau$ で最大値 $C\frac{1}{n!}\left(\frac{b}{a\tau}\right)^n$ をとるガウシアンの重ね合わせとなっているという物理的な描像も得ることができたこと.

$$X(t) = C\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{b}{a\tau}\right)^n e^{-\frac{1}{2}a(t-n\tau)^2}. \tag{4}$$

(C は積分定数). さらに現象としては周波数共鳴が出現すること [3].

これらに基づいて, 式 (1) について探求することで, この振幅拡大現象の理解をすすめることを目的としています.

まず遅れがない場合, $\tau = 0$, を考察します. 初期条件を　　$Y(0) = y_0, \quad Y'(0) = y_1$ として, $z = -at^2/2$

を導入し, $Y(t) = u(z)$ と書きます. 方程式 (1) は以下のクマーの合流型超幾何方程式に還元されます.

$$zu''(z) + \left(\frac{1}{2} - z\right)u'(z) - \frac{b}{2a}u(z) = 0. \tag{5}$$

初期条件を用いると, 以下の解が得られます.

$$Y(t) = y_0\,{}_1F_1\left(\frac{\mu}{2a}; \frac{1}{2}; -\frac{at^2}{2}\right) + y_1 t\,{}_1F_1\left(\frac{a+\mu}{2a}; \frac{3}{2}; -\frac{at^2}{2}\right). \tag{6}$$

ここで ${}_1F_1(\alpha;\gamma;z)$ は合流型超幾何関数を表します.

特に有用な部分ファミリーは, 次を満たす場合に現れます.

$$\mu = (2n+1)a, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

クマー変換により超幾何パラメータが非正の整数または半整数になり, 級数が有限項で打ち切られます. 解は次のように記述できます.

$$Y(t) = e^{-at^2/2}\left[y_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k}{(1/2)_k\, k!}\left(\frac{at^2}{2}\right)^k + y_1 t \sum_{k=0}^{n} \frac{(1/2-n)_k}{(3/2)_k\, k!}\left(\frac{at^2}{2}\right)^k\right], \tag{8}$$

ここで $(q)_k$ はポッハハマー記号を表します. したがって, 偶成分は t^2 の n 次多項式にガウス因子を乗じたものであり, 奇成分は t に別の t^2 の n 次多項式と同一のガウス因子を乗じたものとなります.

遅れが存在する場合, $\tau >$, では上記のような形で書くことは現状では行えていません. しかし数値計算からいくつかの結果が得られました. これらは図１に示します. 次のような結果が得られてます.

(a) 典型的には WavePacket のような形状をもつダイナミクスの軌跡となる.

(b) 適切なパラメータ調整で, やはり遅れの存在が振動の振幅を大きく拡大する.

(c) ダイナミクスの最大値 $Max[Y]$ をとる時刻 t_{max} は近似的に $\mu\tau/a$ に比例する.

通常の共鳴現象とことなり, 式 (1) には振動する外部入力は存在しません. Wave Packet は信号処理などで応用があるようなので, 手軽に小さな初期値からでも大きな, しかし有限振幅の Wave Packet を生み出せる意義はあるかと思います. 現状では数値解析のみですが, 本文に述べた厳密解を手がかりにしながら, 解析的にもこの現象の解明ができないかと考えています. また, 理論だけではなく実験的な実現も模索したいところです.

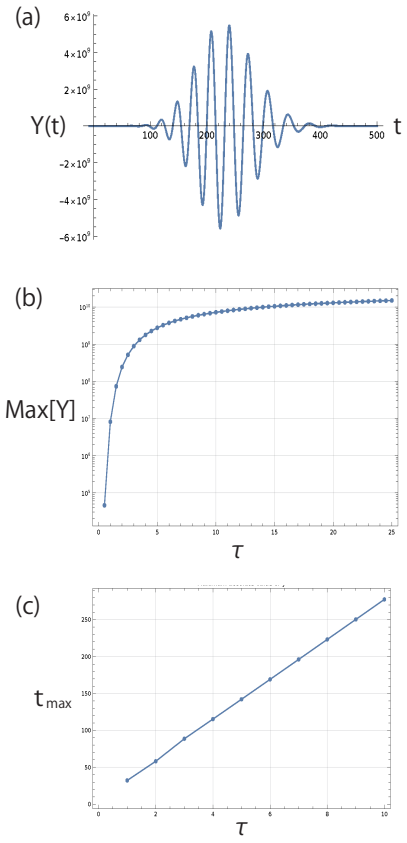

図 1: 式 (1) の解に関する数値計算パラメータは $a = 0.2$, $\mu = 9.0$, $t \in [-\tau, 0]$ 区間の 初期関数は $Y(t) = 1.5$, $Y'(0) = -6.0$ とした. (a) 典型的なダイナミクスの軌跡 ($\tau = 8.0$). (b) 遅れ τ を変化させた時の $Y(t)$ の最大振幅 $Max[Y]$ の変化. (c) 遅れ τ を変化させた時の $Y(t)$ が最大値をとる時刻 t_{max} の変化.

参考文献

[1] K. Ohira, T. Ohira and H. Ohira "Amplitude enhancements through rewiring of a non-autonomous delay system, " *Chaos* 53, 041101 (2025).

[2] K. Ohira, "An exact solution for a non-autonomous delay differential equations," *SIAM J. on Applied Dynamical Systems*) 24, 3169-3182 (2025).

[3] K. Ohira, "Resonating Delay Equation," *EPL*, 137, 23001 (2022).