クープマン解析

薄 良彦 [1]

[1] 京都大学 大学院工学研究科　〒 615–8510 京都市西京区京都大学桂

あらまし　本発表では，クープマン作用素による非線形力学系の解析について，導入的内容と筆者による最近の研究について紹介する．
キーワード 非線形力学系; クープマン作用素; データ駆動型解析

The Koopman Analysis

Yoshihiko SUSUKI[1]

[1] Graduate School of Engineering, Kyoto University　Katsura, Nishikyo-ku, Kyoto 615-8510 Japan

Abstract In my talk, I will introduce the basic idea of analyzing nonlinear dynamical systems using Koopman operators and present my recent research.
Key words Nonlinear dynamical system; Koopman operator; Data-driven analysis

クープマン作用素は，非線形力学系の解析と制御に関わり，近年活発に研究されている（例えば，文献 [1–6] を参照）．この研究は，非線形系を記述する流れないし写像から誘導される合成作用素—クープマン作用素—に基づく [7]．クープマン作用素は，力学系の状態空間上のスカラー値関数である観測量に作用し，その時間発展を記述する線形作用素である．一般に無限次元の関数空間を扱う必要があるものの，状態の時間発展を観測量の時間発展として捉えることで，線形作用素の理論を非線形系の解析と制御に適用できることがポイントである [2]．特に，クープマン作用素のスペクトル的性質は，非線形系のダイナミクスを特徴付け，その解析と制御の手がかりとなる．例えば，出力を表す観測量がクープマン作用素の有する固有関数で展開できる場合，その出力の時間発展は対応する固有値（点スペクトル）によって定まる振動（モード）に分解される．この分解はクープマンモード分解（Koopman Mode Decomposition; KMD）[8,9] と呼ばれる．KMD を出力の時系列データから近似する代表的な数値計算技法として，動的モード分解（Dynamic Mode Decomposition; DMD）[10] があり，振動や同期のデータ駆動型解析などを含めて，DMD の拡張と応用が幅広く研究されている．本発表では，クープマン作用素による非線形系の解析について，導入的内容と筆者による最近の研究 [11–14] ををいくつか紹介したい．

謝辞 本発表で紹介する研究の一部は科研費・基盤研究 B（23K26128, 26K00968）および JST ムーンショット型研究開発事業（JPMJMS2284）の成果である．

参考文献

[1] I. Mezić: Analysis of Fluid Flows via Spectral Properties of the Koopman Operator, Annual Review of Fluid Mechanics, **45**-1, 357/378 (2013)

[2] A. Mauroy, I. Mezić and Y. Susuki (eds.): The Koopman Operator in Systems and Control: Concepts, Methodologies, and Applications, Springer International Publishing (2020)

[3] S. E. Otto and C. W. Rowley: Koopman Operators for Estimation and Control of Dynamical Sys-

tems, Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems, **4**, 59/87 (2021)

[4] P. Bevanda, S. Sosnowski and S. Hirche: Koopman Operator Dynamical Models: Learning, Analysis and Control, Annual Reviews in Control, **52**, 197/212 (2021)

[5] S. L. Brunton, M. Budišić, E. Kaiser and J. N. Kutz: Modern Koopman Theory for Dynamical Systems, SIAM Review, **64**-2, 229/340 (2022)

[6] 薄良彦：クープマン解析：クープマン作用素による非線形ダイナミクスの解析と制御，森北出版 (2025)

[7] A. Lasota and M. C. Mackey: Chaos, Fractals, and Noise, Springer (1994)

[8] I. Mezić: Spectral Properties of Dynamical Systems, Model Reduction and Decompositions, Nonlinear Dynamics, **41**-1, 309/325 (2005)

[9] C. W. Rowley, I. Mezić, S. Bagheri, P. Schlatter and D. S. Henningson: Spectral Analysis of Nonlinear Flows, Journal of Fluid Mechanics, **641**, 115/127 (2009)

[10] J. N. Kutz, S. L. Brunton, B. W. Brunton and J. L. Proctor: Dynamic Mode Decomposition, Society for Industrial and Applied Mathematics (2016)

[11] Y. Susuki, A. Mauroy and I. Mezić: Koopman Resolvent: A Laplace-Domain Analysis of Nonlinear Autonomous Dynamical Systems, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, **20**-4, 2013/2036 (2021)

[12] Y. Susuki, A. Mauroy and Z. Drmač: Koopman Resolvents of Nonlinear Discrete-Time Systems: Formulation and Identification, Proc. 2024 European Control Conference (ECC), 627/632 (2024)

[13] Y. Susuki, N. Katayama, A. Mauroy and I. Mezić: On Koopman Resolvents and Frequency Response of Nonlinear Systems, Proc. 2026 European Control Conference (ECC), 668/673 (2026)

[14] Y. Susuki: Koopman Resolvents, In: D. Alpay, F. Colombo, and I. Sabadini (eds.) Operator Theory, Springer, Basel (2026)