グラフ上で定義された蔵本モデルと連続極限

矢ヶ崎 一幸 [1]

[1] 京都大学大学院情報学研究科　〒 606–8501 京都市左京区吉田本町 36-1

あらまし　グラフ上で定義された蔵本モデルとその連続極限に関する講演者の最近の研究成果を紹介する．
キーワード 蔵本モデル，連続極限，同期解，分岐，安定性

Kuramoto models and their continuum limits on graphs

Kazuyuki Yagasaki[1]

[1] Graduate School of Informatics, Kyoto University
36-1 Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, Japan

Abstract Recent results of the speaker on the Kuramoto models defined on graphs and their continuum limits are described.
Key words Kuramoto model, continuum limit, synchronized solution, bifurcation, stability

1.　はじめに

グラフ $G_n\langle V(G_n), E(G_n), W(G_n)\rangle$ 上で定義された，自然振動数を有する次の蔵本モデル [2] を考える．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_i^n(t) = \omega_i^n + \frac{K}{n\alpha_n}\sum_{j=1}^n w_{ij}^n \sin\left(u_j^n(t) - u_i^n(t)\right), \quad i \in [n] := \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad (1)$$

ここで，n は節点数，$u_i^n(t) \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ と $\omega_i^n \in \mathbb{R}$ は節点 $i \in [n]$ における振動子の位相と自然振動数，K は結合係数である．$V(G_n) = [n]$ と $E(G_n)$ は，それぞれ，節点集合と枝集合であり，$W(G_n)$ は重み行列で $(i, j) \in E(G_n)$ のとき $(W(G_n))_{ij} = w_{ij}^n$，それ以外は $(W(G_n))_{ij} = 0$ とする．グラフ G_n は，極限 $\lim_{n\to\infty} \#E(G_n)/(\#V(G_n))^2$ が正のとき稠密，零のときスパースであり，稠密な場合は $\gamma = 0$，スパースな場合は $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ として $\alpha_n = n^{-\gamma}$ とする．

$I = [0, 1]$,

$$I_i^n := \begin{cases} [(i-1)/n, i/n) & \text{for } i < n; \\ [(n-1)/n, 1] & \text{for } i = n, \end{cases}$$

とし，$W \in L^2(I^2)$ を非負関数とする．グラフ G_n, $n \in \mathbb{N}$, が確定的ならば

$$w_{ij}^n := \langle W(x, y)\rangle_{ij}^n = n^2 \int_{I_i^n \times I_j^n} W(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

とし，確率的稠密ならば確率

$$\mathbb{P}((i, j) \in E(G_n)) = \langle W(x, y)\rangle_{ij}^n$$

で，確率的スパースならば確率

$$\mathbb{P}((i, j) \in E(G_n)) = \alpha_n \langle \min(\alpha_n^{-1}, W(x, y))\rangle_{ij}^n$$

で $w_{ij}^n = 1$ とする．

$n \gg 1$ のとき，蔵本モデル (1) は連続極限

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \omega(x) + K\int_I W(x, y) \sin(u(t, y) - u(t, x))\mathrm{d}y, \quad x \in I \qquad (2)$$

により近似できることが証明されている [1,3]．ここで，次の関係を仮定している．

$$\omega_i^n = n\int_{I_i^n} \omega(x)dx, \quad i \in [n],$$

以下では，$a > 0$ を定数として $\omega(x) = a(x - \frac{1}{2})$ とし，自然振動数 $\omega_i, i \in [n]$, が等間隔に配置された場合を考える．

2. 古典蔵本モデル

G_n が完全グラフ，すなわち，$w_{ij} = 1, i, j \in [n]$, である古典的な蔵本モデルに対して，節点数 n が奇数で，$n_0 \in \mathbb{N}$ として $n = 2n_0 + 1$，$\nu = a/n$ とおく．$\sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{2n_0}$ を各項が $\sigma_i \in \{-1, 1\}$ $(i \in [2n_0])$ で与えられる数列とし，それら全体の集合を Σ_{n_0} と表す．各 $\sigma \in \Sigma_{n_0}$ に対して関数 $\chi^\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$\chi^\sigma(\xi) = \frac{\xi}{n_0}\left(1 + \sum_{i=1}^{n_0} \sigma_i \sqrt{1 - \left(\frac{i - n_0 - 1}{n_0}\xi\right)^2} + \sum_{i=n_0+1}^{2n_0} \sigma_i \sqrt{1 - \left(\frac{i - n_0}{n_0}\xi\right)^2}\right)$$

と定め，

$$v_i^\sigma = \begin{cases} \phi_i & (\sigma_i = 1); \\ \pi - \phi_i & (\sigma_i = -1\ , \phi_i > 0); \\ -\phi_i - \pi & (\sigma_i = -1, \phi_i < 0), \end{cases}$$

$$\phi_i = \begin{cases} \arcsin\left(\dfrac{(i - n_0 - 1)\xi}{n_0}\right) & (i \le n_0); \\ \arcsin\left(\dfrac{(i - n_0)\xi}{n_0}\right) & (n_0 < i \le 2n_0) \end{cases}$$

とおく．さらに，$\theta \in \mathbb{S}^1$ をパラメータとして

$$u_{n_0+1} = \theta, \quad u_i = \begin{cases} v_i^\sigma + \theta & \text{for } i \le n_0; \\ v_{i-1}^\sigma + \theta & \text{for } i \ge n_0 + 2 \end{cases} \tag{3}$$

とする．

定理 1 (矢ヶ崎 [3])**.** (i) ある $\sigma \in \Sigma_{n_0}$ と $K > 0$ に対して $\xi \in (0, 1]$ が $a/K = |\chi^\sigma(\xi)|$ を満たすものと仮定する．このとき，式 (3) は蔵本モデル (1) の平衡点の族を与え，他の平衡点は存在しない．

(ii) K を制御パラメータとした場合，$|\chi^\sigma(\xi)|$ が $(0, 1)$ 上で極大あるいは極小となるときサドル・ノード分岐が起こり，$K = a/|\chi^\sigma(1)|$ のときピッチフォーク分岐が起こる．

(iii) すべての $i \in [2n_0]$ に対して $\sigma_i = 1$ ならば，$\chi^\sigma(\xi)$ は唯一の極大値をもち，そのときの ξ の値を ξ_0 とすると，平衡点の族 (3) は $\xi < \xi_0$ のとき漸近安定，$\xi > \xi_0$ のとき不安定となる．一方，ある $i \in [2n_0]$ に対して $\sigma_i \ne 1$ ならば，平衡点の族 (3) はつねに不安定である．

3. 連続極限

各 $\sigma \in \Sigma_{2n_0}$ に対する蔵本モデル (1) の平衡点の族 (3) の $n \to \infty$ の極限から連続極限 (2) の連続解および非連続解の 1 パラメータ族が得られる．特に，$K/a \ge 2/\pi$ のとき，$\theta \in \mathbb{S}^1$ を任意定数，$C > 0$ を

$$C = \frac{KC}{a}\left(\arcsin\left(\frac{a}{2KC}\right) + \frac{a}{2KC}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2KC}\right)^2}\right)$$

を満たす定数，

$$U(x) = \arcsin\left(\frac{a(x - \frac{1}{2})}{KC}\right)$$

として，次の連続解の 1 パラメータ族を有する．

$$u(t, x) = U(x) + \theta, \tag{4}$$

$$u(t, x) = \pi - U(x) + \theta \tag{5}$$

定理 2 (矢ヶ崎 [3])**.** 連続解の族 (4) は漸近安定である．一方，連続解の族 (5) とすべての不連続解の族は不安定である．

注意 3. 1 以上の有限個の $i \in [n]$ を除いて $\sigma_i = 1$ であるならば，定理 1 により不安定である蔵本モデル (1) の平衡点の族 (3) は，$n \to \infty$ のとき連続極限 (2) の漸近安定な解 (4) に $L^2(I)$ の意味で収束する．これは一見奇妙であるものの，結合振動系と連続極限の関係性に関する文献 [1,3] の結果と矛盾しない．

講演では，蔵本モデルと連続極限に関する，講演者の最近の他の結果にも触れる．

謝辞　本研究は科研費（JP23K22409）の助成を受けたものである．

参考文献

[1] R. Ihara and K. Yagasaki, Continuum limits of coupled oscillator networks depending on multiple sparse graphs, *J. Nonlinear Sci.*, **33** (2023), 62; Correction, **35** (2025), 27.

[2] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, 1984.

[3] K. Yagasaki, Bifurcations and stability of synchronized solutions in the Kuramoto model with uniformly spaced natural frequencies, *Nonlinearity*, **38** (2025), 075032; Corrigendum, **38** (2025), 109501.