

一様グラフ上で定義されたランダムな自然振動数をもつ蔵本モデルのフィードバック制御

キム ドンゴン¹, 矢ヶ崎 一幸¹

¹ 京都大学 情報学研究科 〒606-8501 京都市左京区吉田本町

あらまし 一様グラフ上で定義されたランダムな自然振動数をもつ蔵本モデルに対して、全振動子が同じ振動数で同期する状態を目標軌道とするフィードバック制御を行う問題を取りあげる。先行研究に基づき、自然振動数がランダムかつフィードバック制御を受ける場合に対しても連続極限の手法が有効であることを示す。

キーワード 蔵本モデル, フィードバック制御, 連続極限, ランダムな自然振動数, 安定性, 一様グラフ

Feedback control of the Kuramoto model with random natural frequencies defined on uniform graphs

Donggeon KIM¹, Kazuyuki YAGASAKI¹

¹ Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501 JAPAN

Abstract We study feedback control of the Kuramoto model (KM) with random natural frequencies on a uniform graph which may be complete, random dense or random sparse, so that each node is desired to exhibit a constant rotational motion. We show based on the previous results that the method of continuum limits is still valid even when the natural frequencies are random and the feedback control is applied.

Key words Kuramoto model, feedback control, continuum limit, random natural frequency, stability, uniform graph

1. 蔵本モデルと連続極限

次式で与えられる、重み付きグラフ $G_n = \langle V(G_n), E(G_n), W(G_n) \rangle$ 上で定義された蔵本モデル [1] のフィードバック制御を考える。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_i^n(t) &= \omega_i^n + \frac{K}{n\alpha_n} \sum_{j=1}^n w_{ij}^n \sin(u_j^n(t) - u_i^n(t)) \\ &\quad + b_1 \sin(V(t) - u_i^n(t)) + b_0, \\ i &\in [n] := \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 n は節点数、 $u_i^n(t) \in \mathbb{S}^1$ と $\omega_i^n \in \mathbb{R}$ は、それぞれ、節点 i における振動子の位相とランダムな自

然振動数を表し、全振動子が同じ振動数 $V_1 > 0$ で同期するように目標軌道は $V(t) = V_1 t + V_0$ (V_1, V_0 は定数) とする。また、 K と α_n は、それぞれ、結合係数とスケーリング因子、 b_1 と b_0 は、それぞれ、フィードバック・ゲインと定常入力である。

一方、 $V(G_n) = [n]$ と $E(G_n)$ は、それぞれ、節点集合と枝集合、 $W(G_n)$ は重み行列で、 $(i, j) \in E(G_n)$ のとき $(W(G_n))_{ij} = w_{ij}^n$ 、それ以外は $(W(G_n))_{ij} = 0$ とする。グラフ G_n は $\lim_{n \rightarrow \infty} \#E(G_n) / (\#V(G_n))^2 > 0$ のとき稠密、0 のときスパースであり、稠密な場合 $\gamma = 0$ 、スパースな場合 $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ として $\alpha_n = n^{-\gamma}$ とおく。

以下では、 G_n は一様、 $W(G_n)$ は対称で、 $p \in (0, 1]$ を定数として、確定稠密な場合は $w_{ij}^n = p$ 、確率稠密な場合は確率 $\mathbb{P}((i, j) \in E(G_n)) = p$ で、確率スパースな場合は確率 $\mathbb{P}((i, j) \in E(G_n)) = \alpha_n \min(\alpha_n^{-1}, p)$ で $w_{ij}^n = 1$ 、それ以外は $w_{ij}^n = 0$ とする。

文献 [2] の結果により、自然振動数が確定的で、

$$\omega_i^n = n \int_{I_i^n} \omega(x) dx,$$

$$I_i^n = \begin{cases} [(i-1)/n, i/n] & \text{for } i < n; \\ [(n-1)/n, 1] & \text{for } i = n, \end{cases} \quad i \in [n],$$

を満たすとき、式 (1) は次の連続極限で近似できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \omega(x) + pK \int_I \sin(u(t, y) - u(t, x)) dy \\ &\quad + b_1 \sin(V(t) - u(t, x)) + b_0, \\ x \in I &:= [0, 1] \end{aligned} \quad (2)$$

2. 主結果

ω_i^n , $i \in [n]$ を $[-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a]$ 上で確率分布 $F(\omega)$ ($F'(\omega) > 0$) に従う独立同分布の確率変数、 $\xi_n : [n] \rightarrow [n]$ を

$$\omega_{\xi_n(1)}^n < \dots < \omega_{\xi_n(n)}^n \quad \text{a.s.}$$

を満たすランダム順列、 $T_{\xi_n} : \mathbb{T}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{T}^n$ を

$$T_{\xi_n}(u_1^n(t), \dots, u_n^n(t)) = (u_{\xi_n(1)}^n(t), \dots, u_{\xi_n(n)}^n(t))$$

で定義されるランダム作用素とする。文献 [3] の結果を用いることにより次の定理を得る。

定理 1. $\omega(x) = F^{-1}(x)$ とし、 $\mathbf{u}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)$ を連続極限 (2) の解とする。このとき、確率 1 で次が成り立つ。

- (i) $\mathbf{u}_n(t)$ が初期条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(0) - \mathbf{u}(0)\| = 0$ を満たす式 (1) の解ならば、 $\forall \tau > 0$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{t \in [0, \tau]} \|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(t) - \mathbf{u}(t)\| = 0$ となる。
- (ii) $\bar{\mathbf{u}}(t)$ が安定ならば、 $\forall \epsilon, \tau > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し、 $n > 0$ が十分大きいとき $\|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(0) - \bar{\mathbf{u}}(0)\| < \delta$ を満たす式 (1) の任意の解 $\mathbf{u}_n(t)$ は $\max_{t \in [0, \tau]} \|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)\| < \epsilon$ となる。さらに、 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ が漸近安定ならば、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)\| = 0$ となる。
- (iii) $\bar{\mathbf{u}}(t)$ が不安定ならば、 $\forall \epsilon, \delta > 0$ に対して $\tau > 0$ が存在し、 $n > 0$ が十分大きいとき式 (1) のある解 $\mathbf{u}_n(t)$ は $\|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(0) - \bar{\mathbf{u}}(0)\| < \delta$ かつ $\|T_{\xi_n} \mathbf{u}_n(\tau) - \bar{\mathbf{u}}(\tau)\| > \epsilon$ を満たす。

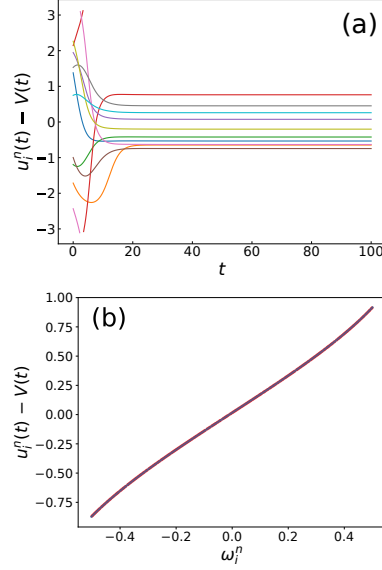


図 1: 蔵本モデル (1) の数値シミュレーション結果 ($n = 1000, a = 1, p = 1, K = 0.5, b_1 = 0.2$) (a) 時刻歴応答; (b) 定常応答の目標軌道からの偏差 ($t = 100$)

定理 1 より、連続極限 (2) の漸近安定な解は、適切なランダム順列の下で蔵本モデル (1) において漸近安定解のように振る舞う。

3. 数値シミュレーション

目標軌道のパラメータ $V_1, V_0 = 1$ の場合の蔵本モデル (1) に対して数値シミュレーションを行った。図 1 に完全単純グラフに対する結果を与える。図 (a) は時刻歴応答であり、速やかに同期状態に到達している。図 (b) では定常応答と連続極限 (2) の特解 [4] の目標軌道からの偏差がプロットされており、両者は完全に一致している。

参考文献

- [1] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Springer, Berlin, 1984.
- [2] R. Ihara and K. Yagasaki, Continuum limits of coupled oscillator networks depending on multiple sparse graphs, *J. Nonlinear Sci.*, **33** (2023), 62.
- [3] K. Yagasaki, Continuum limit of the Kuramoto model with random natural frequencies on uniform graphs, *Phys. D*, **481** (2025), 134818.
- [4] K. Yagasaki, Feedback control of the Kuramoto model defined on uniform graphs I: Deterministic natural frequencies, submitted for publication.