

リカレントニューラルネットワークにおける情報処理ダイナミクス：部分的な入出力と計算能力

青柳 富誌生¹, 高須 正太郎¹

¹ 京都大学大学院 情報学研究科 〒 606-8501 京都市左京区吉田本町

あらまし リカレントニューラルネットワーク (RNN) を用いた情報処理、特にリザーバーコンピューティング (RC) の性能は、その内部ダイナミクスに強く依存する。本研究では、RNN のダイナミクスと計算能力に関する 2 つの主要な問題、(1) 入力の一部のニューロンに限定される（部分入力）場合のカオスダイナミクスの制御、および (2) 計算能力（記憶容量・非線形計算能力）が読み出しニューロン数に応じてどのようにスケールするかに焦点を当てた。(1) について、条件付き最大リアプノフ指数 (MCLE) を解析的に導出し、カオス抑制には臨界的な入力ニューロン割合 p_c が存在し、その値はネットワークの自発的なカオスの強さ λ_0 のみで決まる普遍的な関数で記述できることを示した。(2) について、読み出しニューロン数 L の増加に対し、記憶容量 (MC) はニューロン間相関の影響で亜線形的にしか増加しないこと、一方で非線形計算能力 ($IPC_D, D \geq 2$) は L の増加に伴い逐次的かつ超線形的に出現することを発見した。これらの結果は、効率的な情報処理を実現する RNN の設計原理に理論的基盤を与えるものである。

キーワード リカレントニューラルネットワーク, リザーバーコンピューティング, カオス, リアプノフ指数, ニューロン相関, 記憶容量

Recurrent Neural Network Dynamics in Information Processing: Partial Input/Output and Computational Capability

Toshio Aoyagi¹, Shotaro Takasu¹

¹ Graduate School of Informatics,
Kyoto University Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, Japan

Abstract The performance of information processing using recurrent neural networks (RNNs), especially in Reservoir Computing (RC), strongly depends on their internal dynamics. This study focuses on two key issues: (1) the control of chaotic dynamics when inputs are restricted to a subset of neurons (partial input), and (2) how computational capabilities (memory capacity and nonlinear capability) scale with the number of readout neurons. For (1), we analytically derived the conditional maximum Lyapunov exponent (MCLE) and demonstrated the existence of a critical input neuron proportion p_c for chaos suppression. We proved that p_c is intrinsically determined solely by the strength of spontaneous chaos, λ_0 . For (2), we found that as the number of readout neurons L increases, memory capacity (MC) exhibits sublinear scaling due to the influence of neuronal correlations. Conversely, we discovered that nonlinear computational capabilities ($IPC_D, D \geq 2$) emerge sequentially and supralinearly with increasing L . These findings provide a theoretical foundation for designing efficient RNNs for information processing.

Key words recurrent neural network, reservoir computing, chaos, Lyapunov exponent, neuronal correlation, memory capacity

1. はじめに

リカレントニューラルネットワーク (RNN) は、その豊かな内部ダイナミクスに基づき、脳の情報処理モデルや、時系列データ処理の機械学習フレームワークであるリザーコンピューティング (RC) の基盤として広く用いられている [1,2]。RC の計算能力は、ネットワークがカオス的な自発活動を示しつつも、入力駆動下ではカオスが抑制されて安定に応答する「カオスの縁 (edge of chaos)」と呼ばれる状態で最大化されると経験的に知られている [3]。

しかし、(1) どのようにネットワークを「カオスの縁」へ制御するか、特に実用上多い、一部のニューロンのみに入力が与えられる「部分入力」のケースでのカオス抑制メカニズム、(2) RC の計算能力が、リソース量 (特に読み出しニューロン数 L) の増加に伴いどのようにスケールするか、という2点は理論的に未解明な点が多かった。本研究では、これら2つの問題の理論的解明に取り組んだ (図1上)。

2. 部分入力によるカオス抑制

入力駆動下の RNN が初期状態によらず入力のみ依存した状態に収束する性質 (Echo State Property, ESP) は、RC が機能するための必要条件である。この性質は、条件付き最大リアプノフ指数 (MCLE, λ) が負 ($\lambda < 0$) であるかによって判定できる。

我々は、入力を受け取るニューロンの割合を p とする部分入力 RNN において、MCLE を解析的に導出した。その結果、 p がある臨界値 p_c より小さい場合、入力強度をどれだけ増強しても λ は正のままであり、カオスを抑制できないことが明らかになった。一方、 $p > p_c$ であれば、入力強度を増大させることで $\lambda < 0$ を達成し、カオスを抑制できる (図1下)。

さらに、この臨界入力割合 p_c は、一見するとネットワークの結合強度 g や疎性 α など様々なパラメータに依存するよう見える。しかし、入力がない状態でのカオスの強さ (最大リアプノフ指数 λ_0) を用いて整理すると、 p_c は g や α の値によらず、 λ_0 のみによって決まる単一の普遍的な関数で記述できることを理論的に証明した [4]。これは、 $p > p_c$ を満たしさえすれば、入力強度を調整するだけでネットワークを「カオスの縁」($\lambda \approx 0$) に制御できることを示唆する。

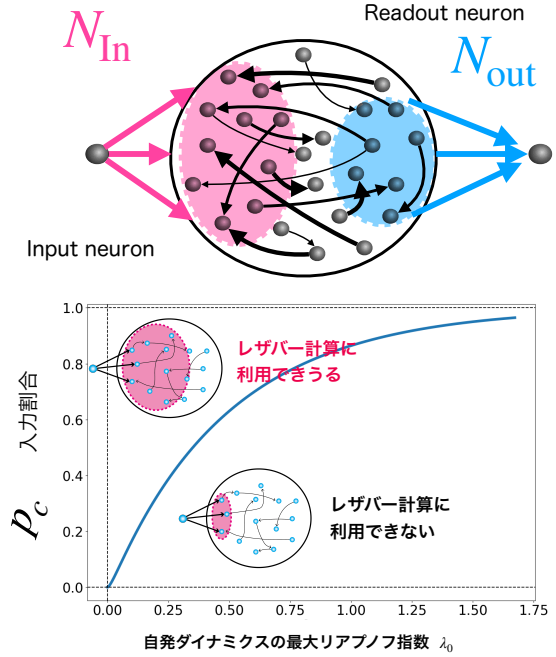


図1: (上図) 部分的な入力または部分的な出力の場合の計算能力 (下図) p_c と λ_0 (無限大入力時の MCLE) の関係。曲線より下の部分入力の割合では、再現性のあるレザバ計算として活用できない。

3. 計算能力とニューロン相関

RC の計算能力は、読み出しニューロン数 L が多いほど向上すると期待される。我々は、RC の主要な性能指標である記憶容量 (MC) と非線形計算能力 (IPC) が、 L に対してどのようにスケールするかを検証した。

まず、MC は L に対して線形に増加する ($MC \propto L$) と長らく信じられてきたが、我々の数値シミュレーションにより、MC の成長率は L の増加に伴い鈍化する「亜線形スケーリング」を示すことを見出した (図2上)。このメカニズムを理論的に解明するため、我々は読み出しニューロン数 L がネットワークサイズ N の平方根のオーダー ($L \sim O(\sqrt{N})$) で増加するという、従来の研究 ($L \sim O(1)$) とは異なるスケーリングを仮定した。この仮定のもと、従来の研究では無視されてきたニューロン間の微弱な相関 (その大きさは $O(1/\sqrt{N})$) を考慮可能な理論的枠組み (動的キャビティ法 [5]) を構築した。その結果、この亜線形スケーリングはニューロン相関によって引き起こされることを理論的に示した。ニューロン相関が

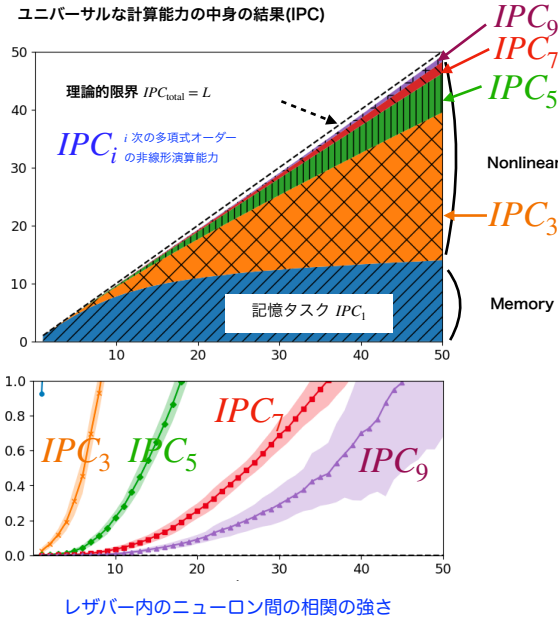


図 2: (上図) 情報処理容量 (IPC) の L への依存性。記憶容量 MC は L に対し亜線形的に増加する。 L の増加に伴い、MC ($D = 1$) の成長は鈍化し、代わりに高次の非線形能力 ($D = 3, 5, \dots$) が逐次的かつ超線形的に出現する。偶次数が無いのは、系の対称性から原理的に演算不可能であるため。

強いほど、MC の成長率はより速く減衰する。この原理は、活性化関数や重み分布が異なる多様な RNN においても成立することを数値的に確認している。

次に、MC の成長が鈍化する一方で、その分のリソース (L の増加分) が何に使われているかを IPC の枠組みで調査した [6]。その結果、 L が増加するにつれて、より高次の非線形計算能力 (IPC_D , $D = 3, 5, \dots$) が、低次から高次へと逐次的かつ超線形的に出現することを発見した (図 2 下)。この線形メモリ (MC) と非線形計算能力 (IPC_D) のトレードオフ、および非線形能力の逐次的出現は、カオス状態やノイズのある系など、理論的制約 ($\sum IPC_D = L$) が成り立たない場合でも普遍的に観測された。このスケーリング則もまた、ニューロン相関によって支配されている可能性が示唆される [7]。

4. 結論

本研究では、RNN の情報処理ダイナミクスに関し、(1) 部分入力によるカオス制御における臨界入力割合 p_c が、ネットワークの自発的なカオスの強

さ λ_0 のみで決まる普遍性を持つこと、(2) RC の計算能力スケーリングにおいて、読み出しニューロン数 L がネットワークサイズ N の平方根のオーダー ($L \sim O(\sqrt{N})$) で増加する場合、ニューロン相関が記憶容量の亜線形化と非線形能力の逐次的出現というトレードオフを生み出すメカニズムを明らかにした。これらの知見は、リザバーの効率的な設計や、脳における情報処理の理解に理論的貢献をするものである。

謝辞

本研究は、JSPS 科研費 JP22KJ1959, JP20K21810, JP20H04144, JP20K20520, MEXT 科研費 23H04467, 24H00723 の支援を受けて行われました。

参考文献

- [1] H. Jaeger, GMD Technical Report, 148 (2001).
- [2] W. Maass, T. Natschlager, and H. Markram, Neural Comput. 14, 2531(2002).
- [3] N. Bertschinger and T. Natschlager, Neural Comput. 16, 1413 (2004).
- [4] S. Takasu and T. Aoyagi, Phys. Rev. Res. 6, 013172 (2024).
- [5] D. G. Clark, L. F. Abbott, and A. Litwin-Kumar, Phys. Rev. Lett. 131, 118401 (2023).
- [6] J. Dambre, D. Verstraeten, B. Schrauwen, and S. Massar, Sci. Rep. 2, 514 (2012).
- [7] S. Takasu and T. Aoyagi, Phys. Rev. Res. 7, 043083 (2025).