振動と同期学の研究会 JSSR (Japanese Society for oscillations and Synchrology Research) 全国大会Society Meeting

弱連成レゾネーターを用いた高感度計測

藪野 浩司¹

¹ 筑波大学 システム情報系 〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1

あらまし 弱連成された同等な物理特性を有する2つのレゾネータに発生するモード局在化を使った 高感度質量センサーを紹介する。一方のレゾネーターに計測対象の質量を付加した場合、モード局在 化によって、振幅比が大きくずれる。この振幅比変化を用いた、高感度計測法が盛んに研究されてい る。本研究では、粘性減衰が存在する非真空環境下でモード局在状態を実現するために、非線形フィー ドバックにより、van der Pol タイプの自励振動をレゾネーターに発生させる。ピコグラムオーダーの 計測結果を示して計測感度を明らかにし、提案方法の有効性を示す。

キーワード モード局在化、自励振動、超臨界 Hopf 分岐、高感度センサー

Highly sensitive sensors with weakly coupled resonators

Hiroshi YABUNO¹

¹ Institute of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba Ten–no–dai 1–1–1 Tsukuba-shi, Ibaraki, 305–8573 Japan

Abstract We present a highly sensitive sensor that uses mode localization occurring in two weakly coupled resonators with equal physical properties. When a mass to be measured is added to one of the resonators, for example, the amplitude ratio shifts significantly due to mode localization. High-sensitivity measurement methods using such amplitude ratio change have been actively studied. In this study, in order to realize a mode-localized state in an experimental environment with viscous damping, a resonator generates van der Pol-type self-excited oscillations by nonlinear feedback. The results of picogram-order measurements are presented and the effectiveness of the proposed method is discussed.

Key words Injection locking, noise intensity, synchronous oscillator

1. はじめに

マイクロエレクトロメカニカルシステム(MEMS)やナノエレクトロメカニカルシステム(NEMS)の進 歩により、微細なセンサー(質量センサー、力センサー、バイオセンサー、走査型顕微鏡など)が開発さ れ、高感度・高精度計測に向けて様々な研究が行われている [1]。レゾネーター(主として cantilever beam や fixed-fixed beam) は、これらのセンサーの計測原理を実現する基本的機械要素であり、その非線形特性特性を 積極的に利用して広く MEMS/NEMS の高機能化が図られている(例えば、[2] を参照)。本発表では、レゾ ネーターを用いた質量センサーを取り上げ、2 つのレゾネーターのモードシフトを利用した高感度計測法 [3] を取り上げ、自励発振を援用した非真空環境下で高感度微小質量計測法を紹介する。

2. 質量計測の感度(周波数シフト法とモードシフト法の比較)

まず一般に微小質量計測で使われている、レゾネータの固有周波数シフトを利用した計測法の感度を示す。 図 1 のようなレゾネーターに計測質量 Δ*m* を付加し、その時レゾネータに生じる固有周波数シフトを測定 する。



Resonator

図 1: 固有周波数シフトを使った質量計測(レゾネーターに計測質量を付加した時の固有周波数シフトを測定 する)

質量の運動方程式は

$$(m+\Delta m)\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$
(1)

であり、質量付加が無いときの固有周波数を ω_0 、付加後のそれを ω' とおくと、付加質量 Δm と周波数シフト $\Delta \omega = \omega - \omega_0$ との関係は

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\Delta m}{m} + O\left(\left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2 \right) \right\},\tag{2}$$

のようになり、周波数シフト法において感度は 1/2 に定され、それ以上の向上は原理的に不可能である。 この限界を打破するため、モードシフトを用いた計測原理が提案された [3]。図 2 が解析モデル図である。



図 2: モードシフトを使った質量計測(弱連成した二つの同一レゾネーターの片方に計測質量を付加した時の モードの変化を測定する)

同一の質量 *m* およびばね定数 *k* を持つ二つのレゾネータをばね定数 k_c で連成させる。一つのレゾネータ に計測質量 Δm を付加する。レゾネーター I、II の運動の変位 (それぞれのばねの伸び) x_1 と x_2 を支配する 無次元運動方程式は以下のように表せる。

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\gamma \omega \frac{dx_1}{dt} + (1+\kappa)\omega^2 x_1 - \kappa \omega^2 x_2 = -\frac{d^2 \Delta x}{dt^2} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} - 2\gamma \omega \frac{dx_2}{dt} - \kappa \omega^2 - (1+\kappa)\omega^2 - \frac{d^2 \Delta x}{dt^2} \end{cases}$$
(3)

$$\left|\frac{d^2x_2}{dt^{*2}} + \frac{2\gamma\omega}{1+\delta}\frac{dx_2}{dt} - \frac{\kappa\omega^2}{1+\delta}x_1 + \frac{(1+\kappa)\omega^2}{1+\delta}x_2 = -\frac{d^2\Delta x}{dt^2}\right|$$
(4)

ここで、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \gamma = \frac{c}{2\sqrt{mk}}, \kappa = \frac{k_c}{k}, \delta = \frac{\Delta m}{m}$ は、それそれ、単一レゾネーターの固有周波数、減衰比、 レゾネーターのばね定数に対する連成ばね定数の比(無次元連成剛性)、レゾネーターの質量に対する計測質 量の比(質量比)を表す。なお、図中の Δx は後述の加振入力であり、ここでは 0 とする。減衰を無視したと き、1 次モードにおける、 $x_1 \ge x_2$ の振幅比は以下のような関係にある。

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{\delta}{2\kappa} \end{bmatrix} + O(\delta^2)$$
(5)

付加質量が0の場合、振幅比は1:1であるが、付加質量によって、振幅比が1:1から変化(モードシフト) する。特に連成剛性比を小さくすることによって、付加質量が小さい場合であってもシフト量は大きくなり、 感度を1/2 よりはるかに大きくできる。

3. 自励発振を用いたモードシフトの測定法

測定環境には粘性が存在するため、粘性を無視して上記のモードを実際に測定するためには工夫が必要で ある。図1に示された Δ*x* に周期的な変位加振入力

$$\Delta x = a \cos v t \tag{6}$$

を与え、強制振動下で発生する共振状態での x₁ と x₂ の振幅比から、モードを求めるのが最も簡便な方法で あるが、粘性が存在する場合、固有モードを正確に求めることはできず、粘性が大きい環境下では Q 値が下 がり、共振ピークがなくなるため固有モードそのものの測定が不可能になる。 そこで、加振入力を

$$\Delta x = \alpha \int x_1 dt \tag{7}$$

のように設定し、減衰力を相殺する[4]. この時、レゾネーターの無次元運動定式は以下の様にかける。

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\gamma + \beta & 0\\ \beta & 2\gamma/(1+\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1\\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+\kappa & -\kappa\\ -\kappa/(1+\delta) & (1+\kappa)/(1+\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

ここで、 $t^* = \sqrt{k/mt}$ は無次元時間であり、ドットは無次元時間による微分を表す。 $\beta = \alpha \sqrt{m/k}$ であり、左辺の第2項から減衰力をフィードバックで打ち消し、Hopf 分岐点近傍で連成レゾネーターを自励発振させることが可能で、非真空の実環境においても、 $x_1 \ge x_2$ の振幅比からモードを実験的に測定できることがわかる(必要なフィードバックゲインに関する計算理論は [4] を参照)。

ところで、線形モードのシフトを測定するためには、発振時の振幅は小さく抑えなければならない。そこ で、安定なリミットサイクルを作るため(超臨界 Hopf 分岐を発生させるため)さらに非線形フィードバック を加えて、以下のよう加振変位 Δ*x* をレゾネーターに与える [5]。

$$\Delta x = \alpha \int x_1 dt + \alpha' \int x_1^3 dt \tag{9}$$

非線形フィードバックのの効果により、式 (3) に van der Pol 振動子に含まれる非線形減衰項と同様な項 $x_1^2 \frac{dx_1}{dt}$ がうまれる。このとき、非線形フィードバックゲインを適切に設定することにより安定なリミットサイクルを作ることができるので、連成レゾネーターは低振幅定常自励発振し、レゾネータの振幅比から線形モードが測定できる。

4. 実験結果

図 3 に示す装置を製作し質量計測を行った。レゾネーター(マイクロカンチレバーの等価質量は 306 ng)を 用いて、質量既知 (1855 pg) のマイクロビーズを計測した結果を図 4 に示す。この時、質量比 δ は 6.06×10^{-3} である。



図 3: 弱連成マイクロカンチレバーを用いた質量計測実験装置



図 4: 質量計測結果 ((a) 質量を付加していない場合の振幅、(b) 質量を付加した場合の振幅)

(a) は質量を付けていない場合であり、振幅比はほぼ 1:1 である。これに対して質量を付けた場合、振幅比 は (b) に示すように、1:1.24 に変わる(モードシフトする)。この結果から計測感度は 0.24/(6.06×10⁻³) = 39 であり、周波数シフト法による感度 0.5 を大きくしのぐ計測感度が得られた [6]。

5. おわりに

弱連成するレゾネーターに発生するモード局在化現象を利用した質量計測技術を紹介した。高感度化には、 物理特性が等しいレゾネータを弱連成させることが必要である。実際の計測装置において、これらの要求を 実現するために、近年さまざまな提案がなされている。発表ではそのいくつかを紹介したい。

参考文献

- G. Narjes, N. Amin, Ashory M.R., A comprehensive categorization of micro/nanomechanical resonators and their practical applications from an engineering perspective: a review, Adv. Electron. Mater. 8, 2200229 (2022).
- [2] M. Younis, MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics (Springer, New York, 2011).
- [3] M. Spletzer, A. Raman, A.Q. Wu, X. Xu, R. Reifenberger, Ultrasensitive mass sensing using mode localization in coupled microcantilevers. Appl. Phys. Lett. 88, 254102 (2006)
- [4] H. Yabuno, Y. Seo, M. Kuroda, Self-excited coupled cantilevers for mass sensing in viscous measurement environments. Appl. Phys. Lett. 103, 063104 (2013)
- [5] T. Nakamura, H. Yabuno, M. Yano, Amplitude control of self-excited weakly coupled cantilevers for mass sensing using nonlinear velocity feedback control, Nonlinear Dyn 99, pp. 85-97 (2020)
- [6] D. Endo, H. Yabuno, K. Hayashi, Y. Yamamoto, S. Matsumoto Self-excited coupled-microcantilevers for mass sensing. Appl. Phys. Lett. 106, 223105 (2015)